

Correction des exercices

Correction de l'exercice 5.1

- **Inversion matricielle** : le système s'écrit sous la forme $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = 14$ et

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ -11 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le système admet une unique solution

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ -11 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

- **Méthode de Cramer** : $\det(A) = 14 \neq 0$ donc le système admet une unique solution dont les composantes sont :

$$x = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 14 & 2 & 1 \\ 13 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{70}{14} = 5, \quad y = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 3 & 13 & -4 \\ 4 & 14 & -1 \end{vmatrix} = \frac{14}{14} = 1,$$

$$z = \frac{1}{14} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 14 \\ 4 & -1 & 13 \end{vmatrix} = \frac{-42}{14} = -3.$$

Le système admet pour solution $(x, y, z)^T = (5, 1, -3)^T$.

- **Méthode de Gauss** : en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$, on a :

$$\begin{cases} x & +y & -z & = & 9 \\ & -y & +4z & = & -13 \\ & -5y & +6z & = & -23 \end{cases}$$

En faisant maintenant $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$, on a :

$$\begin{cases} x & +y & -z & = & 9 \\ & -y & +4z & = & -13 \\ & & -14z & = & 42 \end{cases}$$

En résolvant du bas vers le haut, on déduit $z = -3$ puis $-y - 12 = -13$ soit $y = 1$. Enfin, $x + 1 + 3 = 9$ donne $x = 5$. On a donc comme unique solution, le vecteur $(5, 1, -3)^T$.

Correction de l'exercice 5.2

En faisant $L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_1$, on a :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -5y = -1 \\ -5y = 3a - 16 \end{cases}$$

En faisant maintenant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, on a :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -5y = -1 \\ 0 = 3a - 15 \end{cases}$$

- Si $3a - 15 \neq 0$ c'est-à-dire si $a \neq 5$, alors la dernière équation n'aura pas de sens et donc le système n'admettra pas de solution.
- Si $3a - 15 = 0$ c'est-à-dire si $a = 5$, alors on aura

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -5y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La dernière équation ($0 = 0$) n'apporte aucune nouvelle information et peut être omise. Il reste

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -5y = -1 \end{cases}$$

De la deuxième ligne, on déduit $y = \frac{1}{5}$. La première ligne donne alors $3x + \frac{2}{5} = 4$ soit $3x = \frac{18}{5}$ soit encore $x = \frac{6}{5}$.

En conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a \neq 5 \\ \left\{ \left(\frac{6}{5}, \frac{1}{5} \right) \right\} & \text{si } a = 5. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 5.3

La matrice du système est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = 0$ donc on ne peut utiliser ni la méthode d'inversion matricielle ni celle de Cramer. Utilisons la méthode de Gauss. En faisant $L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1$, on a :

$$\begin{cases} -2x & +y & +z & = & 0 \\ & -3y & +3z & = & 0 \\ & +3y & -3z & = & 0 \end{cases}$$

En faisant maintenant $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, on a :

$$\begin{cases} -2x & +y & +z & = & 0 \\ & -3y & +3z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

En éliminant la troisième ligne, on déduit de la seconde ligne que $y = z$. La première ligne donne alors $-2x + 2z = 0$ soit $x = z$. L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \{(z, z, z), \quad z \in \mathbb{R}\}.$$